1. Classe di Thom e dualità di Poincaré

LEMMA 1 Sia $\pi: E \to M$ fibrato vettoriale di rango k e $\sigma: M \to E$ una sezione di π. Se α é p-forma chiusa tale che $\overline{\pi(\operatorname{supp}\alpha)} \subset U$, allora esiste τ $(p-1)$-forma tale che

(i) $\alpha - \pi^*\sigma^*\alpha = d\tau$

(ii) $\operatorname{supp}\tau \subset E|_U$

DIM Per il lemma di Poincaré esiste una $(p-1)$-forma τ' t.c. $\alpha - \pi^*\sigma^*\alpha = d\tau'$. Si noti che τ' é determinato da questa condizione a meno di forme chiuse. Così l'enunciato é equivalente all'esistenza di una forma chiusa ψ su E t.c. $\tau' \equiv -\psi$ fuori da $E|_U$.

Posto $V = M \setminus \overline{\pi(\operatorname{supp}\alpha)}$ si osservi che $\tau'|_{E|_V}$ é una forma chiusa.

Per il lemma di Poincaré $\exists$ φ $(p-2)$-forma su $E|_V$ t.c. $(\tau' - \pi^*\sigma^*\tau')|_V = d\varphi$.

Sia $\rho \in C^\infty(M)$ tale che $\operatorname{supp}\rho \subset V$ e $\rho \equiv 1$ in un intorno V' di $M \setminus U$.

Poniamo $\tilde{\varphi} \in \Omega^{p-2}(E)$ t.c. $\tilde{\varphi} = (\rho \circ \pi)\varphi$ su $E|_V$ e $\tilde{\varphi} \equiv 0$ su $E \setminus E_{\operatorname{supp}\rho}$.

Poniamo $-\psi = \pi^*\sigma^*\tau' + d\tilde{\varphi}$. Si osservi che su $E_{V'}$ $\varphi \equiv \tilde{\varphi}$ e dunque $\psi \equiv -\tau'$. D'altra parte

$$-d\psi = d\pi^*\sigma^*\tau' = \pi^*\sigma^*(d\tau') = \pi^*\sigma^*(\alpha - \pi^*\sigma^*\alpha) = \pi^*\sigma^*(\alpha) - \pi^*(\sigma^*\pi^*)\sigma^*\alpha =$$

$$= \pi^*\sigma^*\alpha - \pi^*(\pi\circ\sigma)^*\sigma^*\alpha = \pi^*\sigma^*\alpha - \pi^*\sigma^*\alpha = 0$$

e dunque ψ é forma chiusa su M che coincide con $-\tau'$ fuori da $E|_U$. $\blacksquare$

PROP 1 Sia $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibrato vettoriale orientato di rango k
Assumiamo M ed E orientati in modo consistente.
Sia τ forma chiusa a supporto compatto lungo le fibre.
Allora τ è un rappresentante della classe di Thom di E
se e solo se per ogni n forma chiusa α t.c. $\pi(\mathrm{supp}\,\alpha) \subset\subset M$
si abbia
$$\int_E \alpha \wedge \tau = \int_M \sigma_0^*(\alpha).$$

DIM

$\Leftarrow$ Fissata una n-forma a supporto compatto ω su M, sia $\alpha = \pi^*(\omega)$. Dalla formula di proiezione si ha
$$\int_E \alpha \wedge \tau = \int_M \omega \wedge \pi_* \tau$$
Del resto per ipotesi si ha
$$\int_E \alpha \wedge \tau = \int_M \sigma_0^* \alpha = \int_M \sigma_0^* \pi^* \omega = \int_M \omega$$

Deduciamo dunque che
$$\int_M \omega \wedge \pi_* \tau = \int_M \omega \quad \forall\ n\text{-forma a supporto cpt } \omega$$
e per dualità ricaviamo $\pi_* \tau \equiv 1$.

$\Rightarrow$ Sia α n-forma su E t.c. $\pi(\mathrm{supp}\,\alpha) \subset U$ con $\overline{U}$ cpt in M.
Per il precedente lemma $\alpha - \pi^* \sigma_0^* \alpha = d\beta$ con $\mathrm{supp}\,\beta \subset E_U$.
Osserviamo che $\beta \wedge \tau$ ha supporto cpt in E.
Per la formula di Stokes
$$0 = \int_E d(\beta \wedge \tau) = \int_E (\alpha - \pi^* \sigma_0^* \alpha) \wedge \tau.$$

Dunque deduciamo che

$$\int_E \alpha \wedge \tau = \int_E \pi^* \sigma_0^* \alpha \wedge \tau = \int_M \sigma_0^*(\alpha) \wedge \pi_* \tau = \int_M \sigma_0^*(\alpha).$$

COR 1 Sia $i_*: H^*_{cv}(E) \longrightarrow H^*(E)$ la mappa indotta dall'inclusione $\Omega^*_{cv}(E) \overset{i}{\hookrightarrow} \Omega^*(E)$. Allora l'immagine tramite i_* della classe di Thom è la duale di Poincaré della sezione nulla E_0 (orientata in modo che $\sigma_0: M \longrightarrow E_0$ preservi orientazione).

DIM Sia τ rappresentante della classe di Thom $\mathcal{T}(E)$.
Allora $i_*(\mathcal{T}(E)) = [\tau]$. Per la proposizione precedente si ha in particolare che $\int_E \alpha \wedge \tau = \int_{E_0} \alpha \quad \forall \alpha \in \Omega^n_c(E) \Rightarrow [\tau] \in H^n(E)$ è il duale di Poincaré di E_0.

COR 2 Sia M cpt allora $\Omega^*_{cv}(E) = \Omega^*_c(E)$ e la classe di Thom coincide con la duale di Poincaré a supporto compatto della sezione nulla.

2. Rivisitazione della dualità di Poincare

In questa sezione fissiamo una varietà orientata M e una sottovarietà chiusa S orientata. Detto $N = N(S;M) \longrightarrow M$ il fibrato normale, consideriamo su di esso l'orientazione per cui se $\{v_1 \dots v_n\}$ è base positiva di T_pM tale che $\{v_1 \dots v_k\}$ è base positiva di T_pS allora $\{[v_{k+1}] \dots, [v_n]\}$ è base positiva di N_p.

Per il teorema dell'intorno tubolare esiste un intorno $\mathcal{N}$ di S in M diffeomorfo a N.

Più precisamente esiste un diffeomorfismo $\psi : \mathcal{N} \longrightarrow N$ t.c. $\psi(x) = \sigma_0(x)$ $\forall x \in S$, essendo σ_0 la sezione nulla.

Osserviamo che la mappa $r = \pi \circ \psi : \mathcal{N} \longrightarrow S$ definisce una naturale retrazione per deformazione di $\mathcal{N}$ su S.

LEMMA 0 Fissato un intorno tubolare $\mathcal{N}$ di S esiste $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ intorno tubolare

(1) $\partial \mathcal{N}'$ ipersuperficie liscia diffeomorfa al fibrato in sfere associato a N, $S(N)$.

(2) r si estende per continuità ad una mappa propria $r : \overline{\mathcal{N}'} \longrightarrow S$.

DIM Poichè $\partial \mathcal{N}$ e S sono chiusi disgiunti, esistono aperti U, V di M t.c. $\partial \mathcal{N} \subset V$, $S \subset U$, $V \cap U = \phi$.

Poniamo $F = \mathcal{N} \setminus U$. Osserviamo che F é chiuso in $\mathcal{N}$, così $\psi(F)$ è chiuso in N. Fissato un prodotto scalare g su N poniamo

$\forall K$ cpt di M $\lambda_K = \inf\{g(\xi,\xi) \mid \xi \in \psi(F),\ \pi(\xi) \in K\}$
Poiché F é chiuso e $F \cap S = \emptyset$ si ha che $\lambda_K > 0$ $\forall K$.
Si fissi ora un ricoprimento $U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_n \subset \ldots$ di S in modo che $\overline{U}_i$ é cpt e $\overline{U}_i \subset U_{i+1}$ e poniamo $\lambda_i = \lambda_{\overline{U}_i}$. Si osservi che $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$. Fissata una p.u. $(\rho_i)_{i\in\mathbb{N}}$ subordinata al ricoprimento $\{U_i\}$ si ponga $\lambda(x) = \sum \rho_i(x)\lambda_i$. Si osservi che se $x \in U_i \setminus U_{i-1}$ allora $\lambda(x) \leq \lambda_i$. Segue che $g(\xi,\xi) \geq \lambda(x)$ $\forall$ $\xi \in \psi(F) \cap N_x$.
Si consideri allora il prodotto scalare $\tilde{g}_x = \frac{2}{\lambda(x)} g_x$ e si osservi che $\tilde{g}(\xi,\xi) \geq 2$ $\forall \xi \in \psi(F)$.
Poniamo $N' = \{y \in N \mid \tilde{g}(\psi(y),\psi(y)) < 1\}$. Osserniamo che N' é un intorno di S disgiunto da F, ovvero contenuto in U.
Sia $y_n \in N'$ una successione convergente in M. Osserviamo che il punto limite $y_\infty = \lim y_n$ deve appartenere a $\overline{N} = N \cup \partial N$. Del resto $y_n \in U$ che é disgiunto da V che é intorno di ∂N.
Dunque $y_\infty \notin \partial N \Rightarrow y_\infty \in N$.
Ció mostra che la chiusura di N' in M coincide con la chiusura di N' in N che chiaramente é $\overline{N}' = \{y \in N \mid \tilde{g}(\psi(y),\psi(y)) \leq 1\}$.
Ció mostra che $\partial N' = \{y \in N \mid \tilde{g}(\psi(y),\psi(y)) = 1\}$, per cui $\partial N'$ é sottovarietá liscia.
Osserviamo infine che come visto a lezione esiste un diffeo $\{\xi \in N \mid \tilde{g}(\xi,\xi) < 1\} \xrightarrow{\Phi} N$ della forma $\Phi(\xi) = f(\|\xi\|)\xi$.
Si osservi dunque che N' é intorno tubolare con identificazione

$\psi' = \Phi \circ \psi : N' \longrightarrow N$. Si osservi che la retrazione indotta $r' = \pi \circ \psi' = \pi \circ \Phi \circ \psi = \pi \circ \psi = r|_{N'}$ e dunque r' si estende ad $\overline{N'} \subset N$. Inoltre poiché $\psi(\overline{N'})$ è compatto sulle fibre $(r')^{-1}(K)$ è cpt in $\overline{N'}$, $\forall K$ cpt in S. ■

Da ora in poi assumeremo sempre di lavorare con intorni tubolari a bordo liscio tali che r si estende a ∂N. *

LEMMA 1 Sia N intorno tubolare di S che verifica le proprietà aggiuntive discusse precedentemente. Allora se $A \subset N$ è un chiuso compatto sulle fibre, $\psi^{-1}(A)$ è chiuso in M.

DIM Sia $y_n \in N$ t.c. $\psi(y_n) \in A$ e $y_n \longrightarrow y_\infty$ in M.
Vogliamo dimostrare che $\psi(y_n)$ ammette sottosuccessione convergente in N. Si osservi che $y_\infty \in \overline{N}$ dunque $r(y_n) \longrightarrow r(y_\infty)$. Segue che $\pi(\psi(y_n)) = r(y_n) \longrightarrow r(y_\infty)$, dunque fissando intorno compatto K di $r(y_\infty)$, si ha che $\psi(y_n) \in A \cap \pi^{-1}(K)$ per $n \gg 0$. Dato che $A \cap \pi^{-1}(K)$ si conclude facilmente. ▨

Sia N intorno tubolare che verifica proprietà aggiuntive allora se $\tau \in \Omega^{n-k}_{cv}(N)$ è rappresentante della classe di Thom possiamo considerare la forma $\nu \in \Omega^{n-k}(M)$ definita da

$$\nu|_N = \psi^*(\tau) \qquad \nu|_{M \setminus \psi^{-1}(\mathrm{supp}\,\tau)} \equiv 0$$

Si osservi che per il lemma $M \setminus \psi^{-1}(\mathrm{supp}\,\tau)$ è aperto e che la definizione è ben posta.

---

* **ESERCIZIO**: Si dimostri che $F \subset N$ è compatto sulle fibre di r (ovvero $r^{-1}(K) \cap F$ è cpt $\forall K$ cpt di S) se e solo se F è chiuso in M.

La forma ν soddisfa la seguente interessante proprietà

PROP 1 Sia $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{N})$ e si assuma

(1) $d\alpha = 0$

(2) la chiusura in M di $\operatorname{supp}_{\mathcal{N}} \alpha$ é compatta.

Allora $\int_{\mathcal{N}} \alpha \wedge \nu = \int_S i^*(\alpha)$

DIM Si osservi che $(\varphi^{-1})^*(\alpha)$ soddisfa le ipotesi della Prop. 1 della precedente sezione. Dunque

$$\int_{\mathcal{N}} \alpha \wedge \nu = \int_N (\varphi^{-1})^*(\alpha) \wedge \tau = \int_S \sigma_0^* (\varphi^{-1})^*(\alpha) = \int_S i^*(\alpha).$$

$\blacksquare$

COR 1 $[\nu] \in H^{n-k}(M)$ é la duale di Poincaré di S in M.

DIM Se $\alpha \in \Omega^k_c(M)$, $d\alpha = 0$, si ha che $r(\operatorname{supp} \alpha|_{\mathcal{N}}) = r(\mathcal{N} \cap \operatorname{supp}\alpha) \leq r(\overline{\mathcal{N}} \cap \operatorname{supp}\alpha)$ e poiché $\overline{\mathcal{N}} \cap \operatorname{supp}\alpha$ é cpt $\alpha|_{\mathcal{N}}$ soddisfa le ipotesi della proposizione. Dunque

$$\int_M \alpha \wedge \nu = \int_{\mathcal{N}} \alpha \wedge \nu = \int_S i^*(\alpha).$$

$\blacksquare$

OSS 1 È possibile che $[\nu] = 0$ (si pensi ad u piano in $\mathbb{R}^3$ o ad una curva che sconnette su una superficie di genere 2). Del resto per costruzione $\nu \neq 0$. Si noti che esso ha la proprietà extra che

$\int_{\mathcal{N}} \alpha \wedge \nu = \int_S i^*(\alpha)$ per ogni forma chiusa definita su $\mathcal{N}$ tale che $\overline{\operatorname{supp}\alpha}^M$ é compatta.

Chiameremo rappresentante del duale di Poincaré di S adattato all'intorno $\mathcal{N}$ una $(n-k)$ forma ν su M tale che

(1) $\operatorname{supp} \nu \subset \mathcal{N}$

(2) $\int_M \alpha \wedge \nu = \int_S i^*(\alpha)$ $\forall$ k-forma chiusa su $\mathcal{N}$ t.c. $\overline{\operatorname{supp} \alpha}^M$ è compatto.

PROP 2 $\nu \in \Omega^{n-k}(M)$ chiusa con $\operatorname{supp} \nu \subset \mathcal{N}$ è rappresentante della duale di S adattata a $\mathcal{N}$ se e solo se $(\varphi^{-1})^*(\nu)$ è un rappresentante della forma di Thom del fibrato normale.

Inoltre se ν e ν' sono rappresentanti della duale di Poincaré adattati ad $\mathcal{N}$ $\Leftrightarrow$ $\exists \beta \in \Omega^{n-k-1}(M)$ t.c. $\nu - \nu' = d\beta$ e $\operatorname{supp} \beta \subset \mathcal{N}$

DIM Dato che $\operatorname{supp} \nu$ è un chiuso di M contenuto in $\mathcal{N}$, il lemma 1 di questa sezione implica che $(\varphi^{-1})^*(\nu) \in \Omega^{n-k}_{cv}(M)$.

Del resto si osservi che poiché $r: \overline{\mathcal{N}} \to S$ è propria, data $\alpha \in \Omega^k(\mathcal{N})$ si ha che $\overline{\operatorname{supp}_{\mathcal{N}} \alpha}^M$ è cpt $\Leftrightarrow$ $r(\operatorname{supp} \alpha) \subset\subset S$

$\Leftrightarrow$ $\pi(\operatorname{supp} (\varphi^{-1})^* \alpha) \subset\subset S$.

Poiché $\int_{\mathcal{N}} \alpha \wedge \nu = \int_N (\varphi^{-1})^* \nu \wedge (\varphi^{-1})^*(\alpha)$ e $\int_S i^*(\alpha) = \int_S \sigma_0^*((\varphi^{-1})^*(\alpha))$

si ottiene che

$\int_{\mathcal{N}} \alpha \wedge \nu = \int_S i^*(\alpha)$ $\forall \alpha$ chiusa con $\overline{\operatorname{supp} \alpha}^M$ cpt $\Leftrightarrow$

$\int_N \beta \wedge (\varphi^{-1})^* \nu = \int_S \sigma_0^*(\beta)$ $\forall \beta \in \Omega^k(N)$ chiusa tale che $\pi(\operatorname{supp} \beta)$ è cpt.

Per la prop 1 della sezione 1 si ha che vale tale condizione $\iff (\psi^{-1})^*(\nu)$ é rappresentante della classe di Thom.

Infine se ν e ν' sono rappresentanti della duale di S adattati a N, si ha che $\exists\, \tilde{\beta} \in \Omega^{n-k-1}_{cv}(N)$ t.c.

$$(\psi^{-1})^*(\nu|_N) - (\psi^{-1})^*(\nu'|_N) = d\tilde{\beta}$$

ovvero

$$(\nu-\nu')|_N = d\, \psi^*(\tilde{\beta})$$

Si osservi che per il lemma 1 di questa sezione $\mathrm{supp}_N\, \psi^*(\tilde{\beta})$ é chiuso in M. Dunque $\exists\, \beta \in \Omega^{n-k-1}(M)$ t.c. $\beta \equiv \psi^*(\tilde{\beta})$ su N e $\beta \equiv 0$ su $M \setminus \mathrm{supp}_N(\psi^*(\tilde{\beta})) = \psi^{-1}(\mathrm{supp}\,\tilde{\beta})$.

Si osservi che $\mathrm{supp}_M \beta = \mathrm{supp}_{\tilde{N}}\, \psi^*(\tilde{\beta}) \subset N$. ▨

OSS 2 Siano N e N' due intorni tubolari di S con $N' \subset N$ e sia ν' il rappresentante del duale di Poincare adattato a ν' allora $\nu - \nu' = d\beta$ con $\beta \in \Omega^{n-k-1}(M)$ con $\mathrm{supp}\,\beta \subset N$.

Segue come la precedente osservazione

COR Se S é compatta ν é a supporto compatto e $[\nu]$ é la duale di Poincare di ν a supporto compatto.

DIM Si osservi che $\tau \in \Omega^{n-k}_{cv}(N)$ é a supporto compatto lungo le fibre ed essendo S cpt $\mathrm{supp}\,\tau$ é compatto. Segue che $\mathrm{supp}\,\nu = \nu^{-1}(\mathrm{supp}\,\tau)$ é compatto.

3. Duali di Poincaré e intersezione

Sia V uno spazio vettoriale orientato e U, W sottospazi di V tali che $V = U \oplus W$. Assumiamo che U e W siano orientati.
Sia $\pi_U : V \to U$ e $\pi_W : V \to W$ le proiezioni tali che $v = \pi_U(v) + \pi_W(v)$.
Fissata una k-forma positiva ω su U (dove $k = \dim U$), e una h forma positiva η su W (dove $h = \dim W$) si ha che $\pi_U^*(\omega) \wedge \pi_W^*(\eta)$ è una $(k+h)$-forma non nulla su V.
Poniamo $\varepsilon_V(U,W) = +1$ se $\pi_U^*(\omega) \wedge \pi_W^*(\eta) > 0$ e $\varepsilon_V(U,W) = -1$ altrimenti.

EX 1) Si dimostri che la definizione di $\varepsilon_V(U,W)$ non dipende dalla scelta di ω e η.

2) Si verifichi che $\varepsilon_{\bar{V}}(U,W) = \varepsilon_V(\bar{U},W) = \varepsilon_V(U,\bar{W}) = -\varepsilon_V(U,W)$ e che $\varepsilon_V(W,U) = (-1)^{kh}\varepsilon_V(U,W)$.

3) Si verifichi che $\varepsilon_V(U,W) = +1 \iff$ fissata base positiva $u_1 \dots u_k$ di U e base positiva $w_1 \dots w_h$ di W la base di V $\{u_1 \dots u_k\, w_1 \dots w_h\}$ è positiva.

Siano ora S_1 e S_2 sottovarietà orientate di una varietà orientata M t.c. $S_1 \pitchfork S_2$ e $\dim S_1 + \dim S_2 = \dim M$. Sotto tali ipotesi $S_1 \cap S_2$ è un insieme discreto che assumiamo finito $S_1 \cap S_2 = \{p_1 \dots p_N\}$.
Si osservi che la condizione di trasversalità implica che $T_{p_i}M = T_{p_i}S_1 \oplus T_{p_i}S_2$, e poiché tutti gli spazi tangenti sono orientati possiamo definire l'intersezione algebrica di

S_1 e S_2 come

$$\iota(S_1,S_2)=\sum_{i=1}^{N}\varepsilon(T_{p_i}S_1, T_{p_i}S_2)$$

Si osservi che $\iota(S_2,S_1)=(-1)^{\dim S_1 \dim S_2}\iota(S_1,S_2)$.

In questa sezione mostreremo

(1) che è possibile fissare intorni tubolari N_1, N_2 di S_1, S_2 in modo che $N_1\cap N_2$ sia contenuto in un intorno tubolare di $S_1\cap S_2$ unione disgiunta di intorni $\overline{U}_i$ di p_i t.c. U_i è diffeomorfo a palla aperta mentre $\overline{U}_i$ è diffeomorfo ad una palla chiusa).

(2) Se α_i sono le duali di Poincaré adattate ad intorni N_i come sopra allora $\int_M \alpha_1\wedge\alpha_2=\iota(S_1,S_2)$.

LEMMA 1 Esistono intorni tubolari N_1 di S_1 e N_2 di S_2 tali che $N_1\cap N_2$ sia contenuto in un intorno tubolare fissato $U=U_1\cup\ldots\cup U_N$ di $\{p_1,\ldots,p_N\}=S_1\cap S_2$.

DIM: Osserviamo che $S_2\setminus U$ è un chiuso disgiunto da S_1. Si fissi V_1 intorno di S_1 disgiunto da un intorno V_2 di $S_2\setminus U$. Si consideri un intorno tubolare N_1 di S_1 in V_1. Si osservi che $\overline{N_1}\cap V_2=\phi$ dunque $\overline{N_1}\cap S_2\subset U$. Ovvero S_2 è disgiunto dal chiuso $\overline{N_1}\setminus U$. Si fissi un intorno tubolare N_2 di S_2 disgiunto da $\overline{N_1}\setminus U$ e si osservi che $N_1\cap N_2\subseteq U$

LEMMA 2 Intorno a ciascun p_i esiste una carta $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ tale che

(1) $\varphi(p) = 0$ e $\varphi(U) = (-1,1)^n$

(2) Posto $x_1 \dots x_n$ le coordinate associate alla mappa φ (ovvero determinate dalla condizione $\varphi(p) = (x_1(p) \dots x_n(p))$) si ha che $U \cap S_1 = \{x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}$ mentre $U \cap S_2 = \{x_1 = \dots = x_k = 0\}$

DIM Sia $f_1 = \dots = f_k = 0$ un'equazione locale per S_2 e $g_1 = \dots = g_{n-k} = 0$ un'equazione locale per S_1.

Si osservi che la condizione di trasversalità implica che i covettori $d_{p_i} f_1 \dots d_{p_i} f_k, d_{p_i} g_1 \dots d_{p_i} g_{n-k}$ sono indipendenti, ovvero formano una base di $(T_{p_i} M)^*$.

Si ha dunque che esistono coordinate $x'_1 \dots x'_n$ intorno a p_i con $x'_i = f_i$ per $i = 1 \dots k$ $x'_{k+j} = g_j$ per $j = 1, \dots, n-k$. A meno di restringere l'intorno su cui sono definite possiamo assumere che la immagine della carta corrispondente sia della forma $(-\varepsilon, \varepsilon)^n$.

Ponendo $x_i := x'_i / \varepsilon$ si ottiene infine una carta che soddisfa le proprietà asserite nell'enunciato.

$\blacksquare$

Una carta (U, φ) che verifica le condizioni del lemma verrà chiamata carta di raddrizzamento di (S_1, S_2) intorno p_i.

Si noti che tali carte formano un sistema fondamentale di intorni di p_i.

OSS: Osserviamo che a meno di cambiare il segno a una delle coordinate possiamo assumere che $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$ si restringa a forma positiva su S_1 e $dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n$ si restringa a forma positiva su S_2. In tal modo da definizione

$$(-1)^{\varepsilon_{p_i}(S_1, S_2)} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n > 0 \quad \text{su } U.$$

OSS Sia (U, φ) carta intorno a p_i che raddrizza (S_1, S_2).

Fissato $\varepsilon < 1$, gli aperti $\hat{U}_\varepsilon = \{p \in U \mid |x_i(p)| < \varepsilon \ \ i = k+1, \dots, n\}$ e $\check{U}_\varepsilon = \{p \in U \mid |x_i(p)| < \varepsilon \ \ i = 1 \dots k\}$ sono intorni tubolari di $U \cap S_1$ e $U \cap S_2$ in U con retrazioni $\pi_i : U_i^\varepsilon \to S_i \cap U$ che inviano il punto di coordinate $(x_1 \dots x_n)$ rispettivamente sul punto di coordinate $(x_1 \dots x_k, 0 \dots 0)$ e $(0 \dots 0, x_{k+1} \dots x_n)$.

LEMMA 3 Fissata $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ t.c. $\operatorname{supp} f \subset (-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2})$ t.c. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 1$.

Allora le forme $\bar{\alpha}_1 \in \Omega^{n-k}(U)$ e $\bar{\alpha}_2 \in \Omega^k(U)$ definite da

$$\bar{\alpha}_1 = (-1)^\eta \ f(x_{k+1}) f(x_{k+2}) \dots f(x_n)\, dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n$$

$$\bar{\alpha}_2 = (-1)^{\eta'} \ f(x_1) \dots f(x_k)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$$

sono rappresentanti delle duali di Poincaré di $S \cap U$ in U adattate a $\hat{U}_\varepsilon$ e $\check{U}_\varepsilon$, dove $\eta = \varepsilon_{p_i}(S_1, S_2)$ e $\eta' = \varepsilon_{p_i}(S_2, S_1)$.

DIM Si osservi che $\bar{\alpha}_1$ e $\bar{\alpha}_2$ sono forme chiuse che hanno supporti compatti sulle fibre di π_1 e π_2 rispettivamente.

Dunque per concludere basterà mostrare che

$$\int_{\pi^{-1}(p)} \bar{\alpha}_i = 1 \qquad \text{per } p \in S_i \cap U$$

Ricordiamo che $\pi_i^{-1}(p)$ è orientato in modo che se ω è forma positiva su S_i e ω' è forma positiva su $\pi_i^{-1}(p)$ allora $\omega_p \wedge \omega'_p$ è forma positiva su T_pM.

Dunque $(-1)^{\eta} dx_{k+1} \wedge \ldots \wedge dx_n$ è positiva sulle fibre di π_1 mentre $(-1)^{\eta'} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$ è positiva sulle fibre di π_2.

Segue facilmente la tesi ▨

PROP 1 Siano N_1, N_2 intorni tubolari di S_1, S_2 tali che $N_1 \cap N_2$ è contenuto in intorno tubolare di $S_1 \cap S_2$.

Siano α_1, α_2 rappresentanti di duali di Poincaré adattati a N_1, N_2, allora

$$\int_M \alpha_1 \wedge \alpha_2 = \iota(S_1, S_2)$$

DIM Come prima cosa mostriamo che l'integrale non dipende dalla scelta di α_1 e α_2. Posto $\alpha_1' = \alpha_1 + d\beta$ con $\beta \in \Omega^{n-k-1}(M)$ $\operatorname{supp} \beta \subset N_1$ si ha

$$\int_M \alpha_1' \wedge \alpha_2 = \int_U \alpha_1' \wedge \alpha_2 = \int_U \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \int_U d\beta \wedge \alpha_2 = \int_M \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \int_U d(\beta \wedge \alpha_2) = \int_M \alpha_1 \wedge \alpha_2 + \int_{\partial U} \beta \wedge \alpha_2 .$$

Si osservi che $\operatorname{supp} \beta \wedge \alpha_2 \subset \operatorname{supp} \beta \cap \operatorname{supp} \alpha_2 \subset N_1 \cap N_2 \subset U$ e dunque $\int_{\partial U} \beta \wedge \alpha_2 = 0$ da cui otteniamo l'indipendenza dell'integrale dalla scelta di α_1. In modo analogo si dimostra la indipendenza dalla scelta di α_2.

Per l'osservazione 2 della sezione 2 é allora sufficiente dimostrare la formula assumendo che N_1 e N_2 siano intorni arbitrariamente fini di S_1 e S_2. In particolare per il lemma 1 di questa sezione, fissate carte disgiunte (U_i, φ_i) che raddrizzano (S_1, S_2) intorno al punto di intersezione p_i, possiamo assumere che $N_1 \cap U_i \subset \hat{U}_{1/2} = \{p \mid |x_j(p)| < \frac{1}{2} \text{ per } j > k\}$ e $N_2 \cap U_i \subset \check{U}_{1/2} = \{p \in U \mid |x_i(p)| < \frac{1}{2} \text{ per } i \leq k\}$.

La dimostrazione utilizza ora il seguente enunciato tecnico la cui dimostrazione verrá posticipata.

LEMMA 4 Esistono α_i rappresentanti dei duali di S_i adattati a N_i, t.c. detti $\bar{\alpha}_i$ forme su U_i costruite come nel lemma 3 con $\varepsilon < \frac{1}{2}$, allora $\exists\ \beta_1 \in \Omega^{n-k-1}(U_i)$, $\beta_2 \in \Omega^{k-1}(U_i)$ t.c.

(1) $\alpha_i - \bar{\alpha}_i = d\beta_i$

(2) $\operatorname{supp} \beta_1 \subset \hat{U}_{1/2}$ $\operatorname{supp} \beta_2 \subset \check{U}_{1/2}$.

Dando per un attimo per buono il lemma otteniamo che

$$\int_{U_i} \alpha_1 \wedge \alpha_2 = \int_{U_i} (\bar{\alpha}_1 + d\beta_1) \wedge (\bar{\alpha}_2 + d\beta_2) = \int_{U_i} \bar{\alpha}_1 \wedge \bar{\alpha}_2 + \int_{U_i} d(\pm \bar{\alpha}_1 \wedge \beta_2 + \beta_1 \wedge \bar{\alpha}_2 + \beta_1 \wedge d\beta_2)$$

Si osservi che $\operatorname{supp}(\pm \bar{\alpha}_1 \wedge \beta_2 + \beta_1 \wedge \bar{\alpha}_2 + \beta_1 \wedge d\beta_2) \subset \hat{U}_{1/2} \cap \check{U}_{1/2}$ e dunque per Stokes l'ultimo integrale é nullo. In definitiva

$$\int_{U_i} \alpha_1 \wedge \alpha_2 = \int_{U_i} \bar{\alpha}_1 \wedge \bar{\alpha}_2 = \int_{U_i} (-1)^{\eta + \eta'} f(x_1) \dots f(x_n)\, dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k =$$

$$\int_{U_i} f(x_1) \dots f(x_n)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k \wedge dx_{k+1} \wedge \dots \wedge dx_n = \varepsilon(S_1, S_2)$$

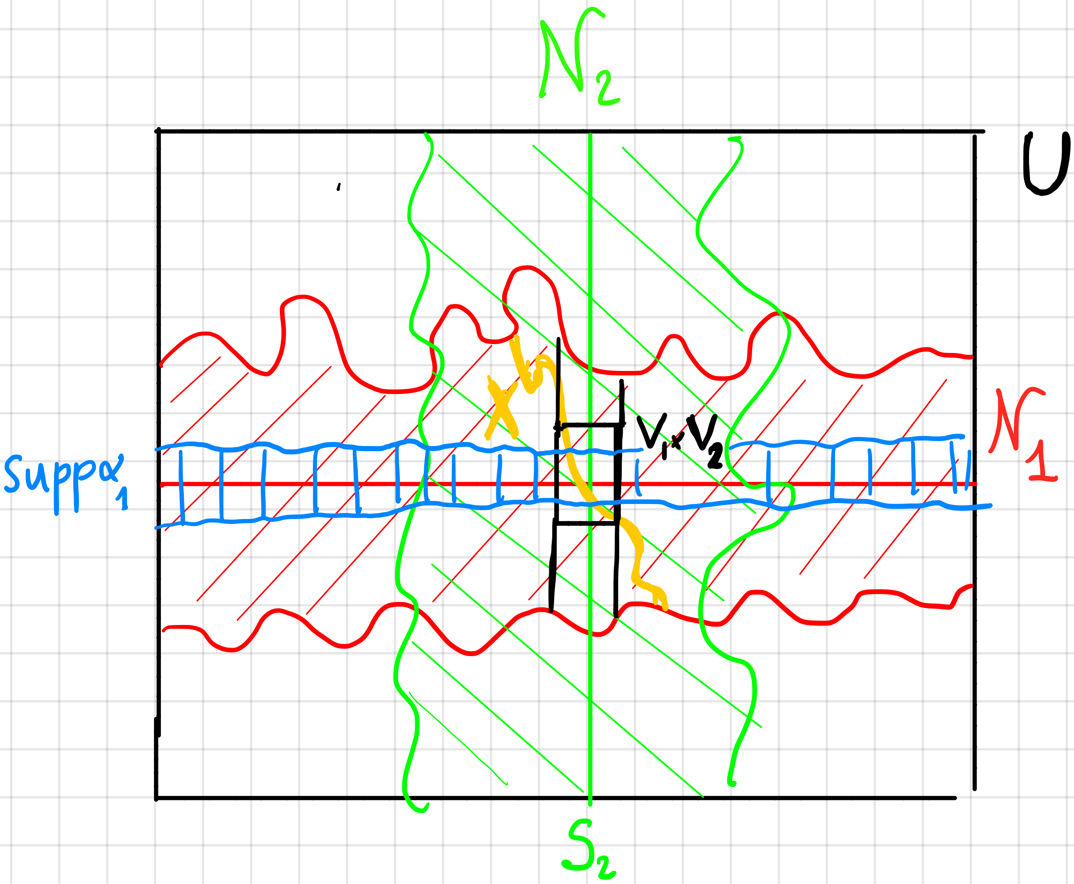
Osservando che $\int_M \alpha_1\wedge\alpha_2 = \sum \int_{U_i} \alpha_1\wedge\alpha_2$ si ottiene la tesi $\blacksquare$

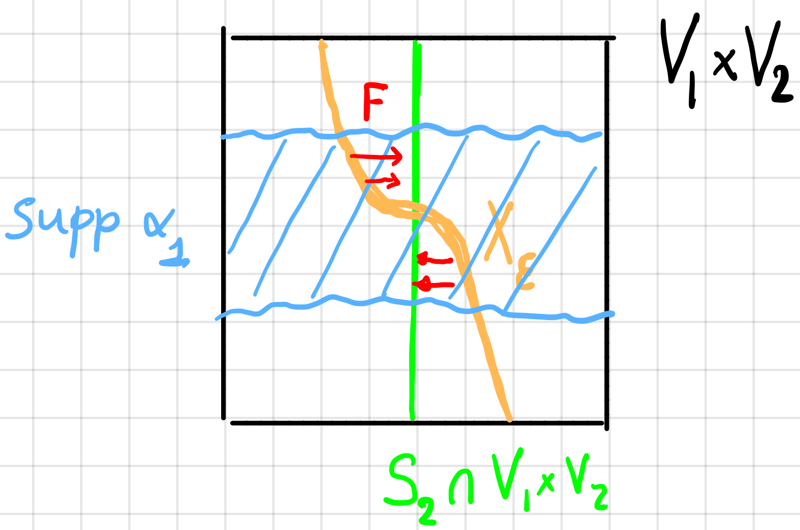
DIM LEMMA 4 Utilizziamo la notazione $\hat{U}_\alpha = \{p\in U \mid |x_j(p)|<\alpha \text{ per } j\geq k+1\}$.
Sia $X = r_1^{-1}(p_i)$, dove $r_1 : N_1 \to S_1$ é la retrazione associata a N_1. Si noti che $T_{p_i}X \oplus T_{p_i}S_1 = T_{p_i}M$. In particolare la proiezione $X\cap U \to \mathbb{R}^{n-k}$ $p\mapsto (x_{k+1}(p),\dots,x_n(p))$ é locale diffeo in un intorno di p_i.
Dette $\pi_\alpha : U_i \to S_\alpha \cap U_i$ le proiezioni che in coordinate trasformano $(x_1\dots x_n)$ in $(x_1\dots x_k, 0\dots 0)$ e $(0\dots 0, x_{k+1},\dots x_n)$,
fissiamo $\varepsilon<\frac{1}{2}$ in modo che π_2 ristretta a $X_\varepsilon = X\cap \hat{U}_\varepsilon$ sia un diffeomorfismo su un aperto V_2 di S_2 mentre sia V_1 aperto di $S_1\cap U$ che contiene $\overline{\pi_1(X_\varepsilon)}$, convesso nelle coordinate $x_1\dots x_k$.
Fissiamo α_1 in modo che $\operatorname{supp}\alpha_1 \cap \pi_1^{-1}(V_1) \subset V_1\times V_2 \subset U$,
$\operatorname{supp}\alpha_1\cap X \subset X_\varepsilon$ e $\operatorname{supp}\alpha_1\cap U \subset \hat{U}_{1/3}$
Si consideri la mappa $F : X_\varepsilon \times [0,1] \to V_1\times V_2$ t.c. in coordinate $(x_1\dots x_n, t) \mapsto (tx_1\dots tx_k, x_{k+1}\dots x_n)$. Si osservi che la condizione $\operatorname{supp}\alpha_1\cap\pi_1^{-1}(V_1)\subset V_1\times V_2$ implica che $F^*(\alpha)$ ha supporto compatto nella varietá a bordo $X_\varepsilon\times[0,1]$. Essendo $F^*(\alpha)$ chiusa si ottiene $\int_{X_\varepsilon}\alpha = \int_{X_\varepsilon\times\{0\}} F^*(\alpha) = \int_{X_\varepsilon\times\{1\}} F^*(\alpha) = \int_{V_2}\alpha$

Di conseguenza si ha $1 = \int_X \alpha_1 = \int_{X_\varepsilon}\alpha_1 = \int_{V_2}\alpha_1 = \int_{S_2\cap U}\alpha_1 = \int_{\pi_1^{-1}(p_i)\cap\hat{U}}\alpha_1$.
Ora α_1 é una $(n-k)$ forma chiusa con su supporto in $\hat{U}_{1/2}$ e t.c. l'integrale sulla fibra della retrazione $\pi_1 : \hat{U}_{1/2} \to S_1$ sopra p_i é 1.
Da Stokes segue che l'integrale su qualunque fibra di $\pi_1 : \hat{U}_{1/2} \to S_1$

è 1, dunque $\alpha_1|_U$ è rappresentante del duale di $\hat{U}_{1/2} \cap S_1$ adattato all'intorno $\hat{U}_{1/2}$. Dato che anche $\bar{\alpha}_1$ è un rappresentante adattato allo stesso intorno si conclude che $\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 = d\beta_1$ con $\mathrm{supp}\, \beta_1 \subset \hat{U}_{1/2}$.

In modo analogo si dimostra l'esistenza di α_2 con le proprietà richieste. ▨





COR Sia S_2 sottovarietá compatta di M. Detta $\eta_1 \in H^{n-k}(M)$ la duale di S_1 e $\eta_2 \in H^k_c(M)$ la duale a supporto compatto di S_2 e indicando con $\langle\, , \rangle_P$ lo accoppiamento di Poincare

$$\langle\ \rangle_P : H^{n-k}(M) \times H^k_c(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

si ha $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_P = \iota(S_1, S_2)$.

DIM Si ricordi che $\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_P = \int_M \alpha_1 \wedge \alpha_2$ dove α_1 e α_2 sono rappresentanti arbitrari delle classi di coomologia / coomologia a supporto cpt η_1, η_2.
In particolare scegliendo rappresentanti adattati ad intorni N_1 e N_2 che soddisfano le condizioni della prop 1 segue la tesi $\blacksquare$

DEF: Diciamo che due sottovarietá $S, S' \subset M$ sono omotope se $\exists\, F: S \times [0,1] \longrightarrow M$ C^∞ t.c. F_0 é l'inclusione e F_1 realizza un diffeo che preserva l'orientazione tra S e S'.
Diciamo che S e S' sono propriamente omotope se puó essere costruita un'omotopia come sopra con la propietá aggiuntiva di essere propria.

OSS Su $M = S^1 \times \mathbb{R}$ $S = \{*\} \times \mathbb{R}$ e $S' = \left(e^{i\theta}, \frac{1}{\theta(\pi-\theta)}\right)$ con $\theta \in (0,\pi)$ sono omotope ma non propriamente omotope.

PROP Siano S e S' sottovarietà propriamente omotope di M, $\dim S = k$, allora $\forall\, \alpha$ k-forma chiusa a supporto compatto

$$\int_S \alpha = \int_{S'} \alpha$$

In particolare le duali di Poincaré coincidono

DIM Sia $F: S \times [0,1] \to M$ l'omotopia propria tra S e S'.
Fissata α una k-forma chiusa a supporto cpt, $F^*(\alpha)$ ha supporto cpt: infatti $\operatorname{supp} F^*(\alpha) \subset F^{-1}(\operatorname{supp}\alpha)$ che è cpt in quanto F è propria. Per Stokes si ha

$$\int_S \alpha = \int_{S\times\{0\}} F^*(\alpha) = \int_{S\times\{1\}} F^*(\alpha) = \int_{S'} \alpha \qquad \blacksquare$$

EX Si dimostri che se S e S' sono sottovarietà cpt omotope allora $\int_S \alpha = \int_{S'} \alpha$ $\forall\, \alpha$ k-forma chiusa e si deduca che le duale di Poincaré a supporto cpt coincidono.

COR Se S_1, S_1' sono sottovarietà propriamente omotope di $\dim k$ e S_2, S_2' sono sottovarietà cpt omotope di $\dim n-k$, t.c. $S_1 \pitchfork S_2$ e $S_1' \pitchfork S_2'$ $\Rightarrow$ $\iota(S_1, S_2) = \iota(S_1', S_2')$

EX Si dimostri l'osservazione della pagina precedente.

OSS Se la varietà ambiente è cpt tutte le sottovarietà sono compatte e in quel caso l'intersezione è invariante omotopico.